ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ -- ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Άσκηση $1^η$ – Συντεταγμένες διανύσματος

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\left(\lambda^2-9,\ |\lambda|-2\right)$ με $\lambda\in R$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει ότι: **α)** $\vec{\alpha}\ //\ x'x$ **β)** $\vec{\alpha}\ //\ y'y$

ΛΥΣΗ

Ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x,\ y)$ είναι παράλληλο προς τον άξονα $x'x$ όταν είναι $y=0$ δηλαδή το $\vec{\alpha}$ είναι της μορφής $\vec{\alpha}=(x,\ 0)$.

Αντίστοιχα το $\vec{\alpha}$ θα είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$ όταν είναι $x=0$ δηλαδή είναι της μορφής $\vec{\alpha}=(0,\ y)$. Επομένως:

α) Έχουμε $\vec{\alpha}\ //\ x'x \Leftrightarrow |\lambda|-2=0 \Leftrightarrow |\lambda|=2 \Leftrightarrow \lambda=\pm 2$.

β) Έχουμε: $\vec{\alpha}\ //\ y'y \Leftrightarrow \lambda^2-9=0 \Leftrightarrow \lambda^2=9 \Leftrightarrow \lambda=\pm 3$.

Άσκηση $2^η$ – Συντεταγμένες διανύσματος

Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(7,16)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\beta}=(-1,2)$ και $\vec{\gamma}=(3,4)$.

ΛΥΣΗ

Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ για να γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ θα πρέπει να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\kappa,\ \lambda$ τέτοιοι ώστε:

$\vec{\alpha}=\kappa\vec{\beta}+\lambda\vec{\gamma}$. Επομένως θα έχουμε:

$$\vec{\alpha}=\kappa\vec{\beta}+\lambda\vec{\gamma} \Leftrightarrow (7,16)=\kappa(-1,2)+\lambda(3,4) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (7,16)=(-\kappa, 2\kappa)+(3\lambda, 4\lambda) \Leftrightarrow (7,16)=(-\kappa+3\lambda, 2\kappa+4\lambda)$.

Επομένως:

$$\left.\begin{array}{l} -\kappa+3\lambda=7 \\ 2\kappa+4\lambda=16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \kappa=3\lambda-7 \\ 2(3\lambda-7)+4\lambda=16 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \kappa=2 \\ \lambda=3 \end{array}.$$

Άρα $\vec{\alpha}=2\vec{\beta}+3\vec{\gamma}$.

Άσκηση 3^{η} – Συντεταγμένες διανύσματος

Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με μέτρο $3\sqrt{5}$ που είναι αντίρροπο του διανύσματος $\vec{\beta}=(-1,2)$.

ΛΥΣΗ

α΄ τρόπος

Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\beta}$ και επομένως

$\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta},\ \lambda<0 \Rightarrow \vec{\alpha}=\lambda(-1,2) \Rightarrow \vec{\alpha}=(-\lambda, 2\lambda)$.

Όμως το μέτρο του $\vec{\alpha}$ είναι $3\sqrt{5}$ και επομένως:

$$|\vec{\alpha}|=3\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(-\lambda)^2+(2\lambda)^2}=3\sqrt{5} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\lambda^2+4\lambda^2}\right)^2=\left(3\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 5\lambda^2=45 \Leftrightarrow \lambda^2=9 \Leftrightarrow \lambda=\pm 3$. Όμως $\lambda<0$ και συνεπώς $\lambda=-3$.

Για $\lambda=-3$ είναι $\vec{\alpha}=(3,-6)$.

β΄ τρόπος

Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$. Το $\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\beta}$ και επομένως είναι παράλληλα. Άρα $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2x+y=0 \quad (1)$

Επίσης

$|\vec{\alpha}| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 45 \quad (2)$

Λύνοντας το σύστημα των σχέσεων (1) και (2) παίρνουμε:

$x=-3$ και $y=6$ ή $x=3$ και $y=-6$.

Επομένως $\vec{\alpha}=(-3,6)$ ή $\vec{\alpha}=(3,-6)$. Όμως το $\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο του

$\vec{\beta}=(-1,2)$ και επομένως το $\vec{\alpha}=(-3,6)$ απορρίπτεται. Άρα $\vec{\alpha}=(3,-6)$.

Άσκηση 4η – Συντεταγμένες διανύσματος

Δίνονται τα σημεία $A(1,-2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(\mu, 4\mu-3)$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\mu \in R$ τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

ΛΥΣΗ

Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα αφού έχουν ένα κοινό σημείο το B.
Έτσι θα έχουμε:

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (3-1, 4+2) = (2,6)$.
- $\overrightarrow{B\Gamma} = (x_\Gamma - x_B, y_\Gamma - y_B) = (\mu-3, 4\mu-3-4) = (\mu-3, 4\mu-7)$.

Συνεπώς θα είναι:

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ \mu-3 & 4\mu-7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(4\mu-7) - 6(\mu-3) = 0 \Leftrightarrow 8\mu - 14 - 6\mu + 18 = 0 \Leftrightarrow 2\mu = -4 \Leftrightarrow \mu = -2$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Άσκηση 5η – Εσωτερικό γινόμενο

Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(7,-1)$ και $3\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(8,-19)$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(7,-1)$ και $\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=(8,-19)$ παίρνουμε:

$$5\vec{\alpha}=(7,-1)+(8,-19)\Leftrightarrow 5\vec{\alpha}=(15,-20)\Leftrightarrow \frac{1}{5}\cdot 5\vec{\alpha}=\frac{1}{5}\cdot(15,-20)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}=(3,-4) \text{ οπότε } 2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(7,-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot(3,-4)+\vec{\beta}=(7,-1)\Leftrightarrow \vec{\beta}=(7,-1)-(6,-8)\Leftrightarrow \vec{\beta}=(1,7).$$

β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\Leftrightarrow \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{3\cdot 1+(-4)\cdot 7}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{7^2+(-1)^2}} \quad \Leftrightarrow \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{-25}{5\sqrt{50}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{-5}{\sqrt{25}\sqrt{2}}\Leftrightarrow \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.

Άσκηση $6^η$ – Εσωτερικό γινόμενο

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$

να δειχθεί ότι: $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

ΛΥΣΗ

Είναι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) + |\vec{\beta}||\vec{\gamma}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \cdot 1 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) + 1 \cdot 1 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right) = 2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right) = 2$

Όμως γνωρίζουμε ότι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$ για κάθε $x \in R$ και επομένως θα

είναι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right) \leq 1$.

Για να έχουν τα δύο παραπάνω συνημίτονα άθροισμα 2 θα πρέπει να

είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 1$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right) = 1$. Επομένως:

- $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 0^0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$

  συνεπώς $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

- $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right) = 0^0 \Leftrightarrow \vec{\beta} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$ και $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$

  συνεπώς $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Άρα $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

Άσκηση $7^η$ – Εσωτερικό γινόμενο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\gamma} = (1, 2)$ και $\vec{\delta} = (4, 3)$.

α) Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\vec{\delta}$ πάνω στο $\vec{\gamma}$.

β) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\delta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\gamma}$.

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι $\vec{\gamma}\cdot \text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{\delta}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}$ καθώς επίσης και

ότι το διάνυσμα $\text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{\delta}$ είναι παράλληλο στο $\vec{\gamma}$.

Επομένως $\text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{\delta}=\lambda\vec{\gamma},\ \lambda\in R.$ (1)

Άρα: $\text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{\delta}=\lambda\vec{\gamma} \overset{\cdot\vec{\gamma}}{\Rightarrow} \vec{\gamma}\cdot\text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{\delta}=\lambda\vec{\gamma}^2 \Rightarrow \vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}=\lambda|\vec{\gamma}|^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1\cdot 4+2\cdot 3=\lambda\cdot\left(\sqrt{1^2+2^2}\right)^2 \Rightarrow \lambda=\frac{10}{5} \Rightarrow \lambda=2$$

Επομένως $\text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{\delta}=2\vec{\gamma} \Rightarrow \text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{\delta}=2(1,2) \Rightarrow \text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{\delta}=(2,4)$.

β) Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ οι κάθετες συνιστώσες στις οποίες αναλύεται το

διάνυσμα $\vec{\delta}$. Είναι: $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}$. Ισχύει:

$\vec{\delta}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}=\text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{\delta}=(2,4)$.

Επομένως έχουμε $\vec{\delta}=\vec{\alpha}+\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\beta}=\vec{\delta}-\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\beta}=(4,3)-(2,4)=(2,-1)$.

Άσκηση 8η – Εσωτερικό γινόμενο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει:

$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}=(1,4)$ και $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}=(-4,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $προβ_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}$ είναι παράλληλο στο $\vec{\alpha}$ ενώ το διάνυσμα $προβ_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}$ είναι παράλληλο στο $\vec{\beta}$. Αφού θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ αρκεί να δείξουμε ότι $προβ_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}\perp προβ_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}$.

Έτσι θα έχουμε: $προβ_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}\cdot προβ_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}=(-4,1)\cdot(1,4)=(-4)\cdot 1+1\cdot 4=0$.

Επομένως $προβ_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}\perp προβ_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}$ άρα και $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

β) Οι δύο παραπάνω προβολές τέμνονται κάθετα και επομένως σχηματίζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου θα έχουμε ότι:

$\vec{\gamma}=προβ_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}+προβ_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}\Rightarrow\vec{\gamma}=(1,4)+(-4,1)\Rightarrow\vec{\gamma}=(-3,5)$.

Άσκηση $9^{η}$ – Εσωτερικό γινόμενο

Δίνονται μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$|\vec{\beta}|=2$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{3}$ και $προβ_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\dfrac{1}{3}\vec{\alpha}$. Να βρείτε:

α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

β) την προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

γ) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $προβ_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\dfrac{1}{3}\vec{\alpha}\overset{\cdot\vec{\alpha}}{\Rightarrow}\vec{\alpha}\cdot προβ_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\dfrac{1}{3}\vec{\alpha}^2\Rightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}=\dfrac{1}{3}|\vec{\alpha}|^2\Rightarrow$

$\Rightarrow|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|συν(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{1}{3}|\vec{\alpha}|^2\Rightarrow|\vec{\beta}|συν\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{3}|\vec{\alpha}|\Rightarrow 2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}|\vec{\alpha}|\Rightarrow|\vec{\alpha}|=3$.

β) Το διάνυσμα $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο στο $\vec{\beta}$ και επομένως:

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}\overset{\cdot\vec{\beta}}{\Rightarrow}\vec{\beta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}^2\Rightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}=\lambda\left|\vec{\beta}\right|^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\lambda\left|\vec{\beta}\right|^2\Rightarrow\left|\vec{\alpha}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\lambda\left|\vec{\beta}\right|\Rightarrow 3\cdot\frac{1}{2}=\lambda\cdot 2\Rightarrow\lambda=\frac{3}{4}$$

Επομένως $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\frac{3}{4}\vec{\beta}$.

γ) $\left|\vec{\gamma}\right|^2=\vec{\gamma}^2=\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+9\vec{\beta}^2-12\vec{\alpha}\vec{\beta}=$

$$=4\left|\vec{\alpha}\right|^2+9\left|\vec{\beta}\right|^2-12\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=4\cdot 9+9\cdot 4-12\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=36.$$

Άρα $\left|\vec{\gamma}\right|^2=36\Rightarrow\left|\vec{\gamma}\right|=6$.